Excerpta ex Epistolis non-nullis, ultrò citróque ab Illustrissimis Viris, Slusio & Hugenio, ad Editorem scriptis, de famigerato Alhazeni Problemate circa Punctum Reslexionis in Speculis cavis aut convexis; & primò quidem ex Prima Hugenii, 26 Junii 1669. scripta:

Itto Tibi hac occasione Constructionem Problematis Als hazeni nuper à me inventam, & à Collegis meis felicem satis judicatam. Problema est;

Dato speculo cavo aut convexo, itemque oculo & puncto rei visz, invenire Punctum Reslexionis.

Sto speculum ex sphæra quæ Centrum habeat A punctum, oculus vero sit in B, & punctum visibile in C, pla· vid. Tab.II. númque ductum per A,B,C, faciat in spæra circulum Dd, in quo invenienda sint Restexionis puncta. Per tria pun-&a A,B C, describatur circuli circumferentia; cujus sit centrum Z, occurrat autem ei producta AE, perpend. BC in R, & sit duabus RA, OA, tertia proportionalis NA, eritque NM, parallela BC, altera asymptoton. Rursus fint proportionales E A, $\frac{1}{2}$ AO, AI, & Summa I. Taquali IN, ducatur TM parallela AZ; eaque erit altera asymptotos. Denique sumtis IX, IS, qua singula possint dimidium quadratum AO, uná cum quadrato AI; erunt puncta x & S in hyperbola, aut sectionibus oppositis D d, ad inventas asymptotos describendis, quarum intersectiones cum circumferentia DO oftendent puncta Reflexionis quasita. Constructio bac. in omni Casu, quo Problema Solidum est, locum habet, prætcrquam in uno ubi non hyperbola sed parabola describenda est; cum nimirum circumferentia per puncta A, B, C descripta, tangit rectam A E.

Hæc Dn. Hugenius, quorum cùm fecisset Editor copiam Dn. Slusio 24 Sept. 1670; hic d.22. Novemb. ejusdem anni hoc modo respondit:

Ot adjucundissimas tuas respondeam, quas nuper admodum accepi, cum variis de rebus agant, ab illa incipiam qua mihi statim inoculos incurrit, ab Alhazeni nimirum Problemate, cujus constructionem à Viro Nobilissimo ad vos transmissam ut vidi, protinus eandem esse cum measuspicatus sum; sed inspectis Adversariis

sariis meis, non leve discrimen reperi, ut mox videbis, & jam sane vidisses nisi me prolixitas ante hac à scribendo deterruisset. Nequid tamen dissimulem, cum Nobilissimi Hugenii constructionem ad calculos revocarem, eandem omnino mecum analysin secutum esse depréhendi; sed cum ex illa due nascantur effectiones, utraque per hyperbolam circa asymptotos; ille unam, ego alteram, uti faciliorem, selegeram. Evidens est autem, nihil aliud quæri hoc Problemate fillud ad terminos merè Geometric cos revocemus) nisi in dato circulo, (cujus centrum A, radius AP) punitum aliquod ut P, à quo ductis ad punit a data E B, inaqualiter à centro A distantia, rectis P E, PB, recta A P producta bisecet angulum EPB. Quod quidem varios casus recipit. Vel enim nor. malis ex A in rectam E B, nimirum AO, cadit inter E & B; vel ultra B. Si ultra, vel rectangulum EOB æquale est quadrato AO. vel majus vel minus. De cosu æqualitatis videbimus infrà; nunc verò tres alios casus eadem ferè constructione complectemur. tria puncta A E B transeat circulus, ad cujus circumferentiam producatur AO in D. Ac si quidem punctum O cadat inter E & B. recta AO versus O producenda erit; sin autem ultra B, sitque re-Cangulum E O B majus quadrato AO, producenda erit versus A; at sirectangulum quadrato minus fuerit, circulus in ipso puncto D, re-Gam AU secabit. Tum ductà A X parallelà E B, secante circulum datum in N, fiat ut rectangulum D AO ad quadratum AN, ita AX ad AH, que sumenda erit ver sus X, st O cadat inter E & B, aut rectangulum EOB minus sit quadrato OA; at ex parte contraria, sist majus. Ponatur nunc 02 equalis AH (in directum E B primo & secundo casu, tertio verò, versus E:) Tum siant proportionales XA.NA.HK, sumenda omni casu versus X: settaque A O in V, ut sit eadem ratio K A ad AV, que AD ad AX; june gatur K V, ac producatur donec occurrat recta EM parallela OA. indefinitè producta, in puncto L; erunt omni casu K L 🔗 🤉 L asymptoti Hyperbolæ, quæ per punetum O descripta, proposito satis faciet: Hoe tantum discrimine, quod primo & secundo Casu hyperbola per O, Problema solvet in speculo convexo, sect o veru ei opposita in concavo; at 3°. casu contrá, Hyperbola per O serviet concavo, ejus opposita convexo. Atque id quidem, cum punstum V cadit inter A & 0; nam si ultra O caderet, unica Hyperbola inter easdem Q L, K L descripta, tam speculo convexo quam concavo satisfaceret. Caterum si V caderet in ip/um punctum 0, Problema tunc planum esset, & ipsæ rectæ L Q. LK illud absolverent. Onde patet, Problematis hujus dari casus infinitus, qui per locum planum solvi possunt: quo magis venià digni videntur ij, qui illud per eundem locum universe solvi pesse censuerunt, quò dipsis aliquoties calculus feliciter cecidist. Nulla enim dari potest trium punctos rum AE B positio, (de casu æqualitatis rectanguli EOB, & quadrati O A mox videbimus,) quæ non admittat circulum aliquem ex centro A describendum, ad cujus circumferentiam Problema per locum planum solvi queat. Hujus autem circuli radius, si tanti est, ita invenietur: In primo & secundo casu superioris constructionis siat ut quadratum A X unà cum dup o rectangulo O AD, ad duplum quadratum AD; ita quadratum AO ad quadratum AN, erit AN radius quassisus. At in 3° casu, faciendum est, ut quadratum AX minus duplo rectangulo O AD, ad duplum quadratum AO; ita quadratum AN.

Construendus nunc superest alius casus, æqualitatis nempe re-Etanguli EOB & quadrati AO, sive in quo circulus, per puncta A, B, E descriptus, tangit rectam Ao. Recte autem monnit Clarissimus Hugenius, boc casu describendam esse Parabolam, quod tamen non ita intelligendum est quasi per Hyperbolam solvi non possit, cùm & Hyperbolam & Ellipsin, imo infinitas (si quis metbodo nostrâ uti velit) admittat; sed quod Parabolam quoque recipiat, quam alii casus respunt. Eadem ratione temperandum est quod ait; Constructionem suam omni casu quo problema solidum est, locum habere; intelligit enim, levi mutatione semper inveniri Hyperbolam que proposito serviat: quod casus à nobis superius con-Aructos cum ejus constructione comparanti planum fiet. Ut autem ad casum æqualitatis redeam, & ne quid temere asseruisse videar, Ecce tibi, non unam, sed duas parabolas, ac præterea Vid. Tak. II. hyperbolas oppositas que propositum absolvunt. Sint, ut priùs, punita data E.B., circulus ex centro A, ac alius per tria puncta A,E,B, cujus tangens sit AO, centrum D. Ductà diametro NADX, fiant tres proportionales XA, NA, ZA, cujus dimidium fit A L. Fiant iterum tres proportionales 2 O A, N A, I A, cujus dimidium sit K A. & perficiatur rectangulum L AOV; productá: que LV in S, donec VS sit tertia proportionalis ipsarum A 1,0 V; axe S L, latere recto A1, vertice S, describatur parabola; hec enim circulum secabit in punctis P. P. quasitis. Tantundem faciet alia, si perfecto rectangulo DAHC, & productà KCinT, ita

nt CT sit terlia proportionalis ipsarum AZ, DC, describatur circa axem TK, vertice T, latere recto, ZA: occurret enim circulo in iisdem punctis PP. Facilior adhuc est constructio per sectiones oppositas; factis enim, ut prius, tribus pro-Fig. VI. portionalibus X A, N A, Z A, demittatur Z I normalis, tertia proportionalis duplæ AO, & AN. Erit itaque Z I major Z A. cum dupla AO minor sit XA: Tum in puncto 1, inclinentur utrinque angulo semirecto ad lineam IZ, recta I Q, IM, & ab utraque parte indefinite producantur; demum circa illas tanquam a/ymptotos describatur per A hyperbola, & alia ipsi opposita; hæc enim satisfaciet Problemati in speculo convexo, illa in concavo. nt oftendimus, Zl semper major sit reet à ZA, recta I M nunquam transibit per A. Non dabitur itaque casus, quo ex hac constructiz one, velut in pracedentibus, Problema per ipsas asymptotos solvi possit: Et tamen hoc quoque aliquando locum planum admittit; cumscilicet accidit, ut recta XO ducta ad centrum D tangat circulum N P P; ipsum enim punctum contactus questionem solvit. Et hæc quidem de Problemate, quod hactenus multorum ingenia exercuit, & cujus solutionem ante aliquot annos absolui, urgente Clar, Gutiscovio, Lovaniensi Matheseos Professore, qui sibi usui futurum aiebat; moliebatur enim nescio quid in Catopiricis : Sed mors manum injecit, neque enim, ut hoc obiter addam, quidquam huju/modi in schedis ejus repertum esse intellexi.

Hacenus Dn. Slusius; eujus Epistolæ Apographum cum, Authore conscio, Editor communicasset Dn. Hugenio, simulque ex aliis laudati slussi literis, 9 Martii 1671. datis, innuisset, invenisse ipsum duas alias ejustem Problematis Analyses, priori illà faciliores, & constructione interse, & ab illa, diversas, quin imò præparationem quandam Generalem, ex qua Problematum omnium, quæ ad Put stom Reslexionis in Speculis Sphæricis, concavis & convexis, determinandum spectant, Analysis facilé deduci possit: Dn Hugenius Gallicè rescripsit 7 Novem. 1671. (tardiùs, ob incommodam puto valetudinem,) in hanc sententiam:

Obstrictum me tibi fateor, eò quod Slusianam Problematis Alhazeni constructionem impertiri voluisti. Exurgit illa, ut rectè notavit, ex eadem Analysi cum mea, ab eaque non longe discrepat; videtur tamen, meam esse naturalem magus, idque ob Hyperbola Asymptotan dispositionem, nec tamen plus opera requirit quam Slusiana. Oportet Oportet equidem, ut ipse hat de re cum eo agam, qui est Geometrarum, quos novi, emnium dostissimus candidissimus que; saltem ut copiam ab ipso petam facilioris adhuc illius Analyseos, quam invenisse se de hoc Problemate affirmat.

Sic Dn. Hugenius; qui cum aliis forte negotiis, vel etiam adversa valetudine impeditus, ipsi Dn. Slusio de hoc argumento scribere differret, Slusius verò dicti Hugenii mentem ab harum Editore accepisset, ipse (Slusius, inquam.) literas hic subjunctas, Editori missas, reposuit.

Antequam ad literas tuas, 22° mensis elapsi datas, respondeam, officii mei ratio postulat hoc Anni novi principio, ut faustum illum ac felicem cum longa similium serie, Tibi, Vir Clarissime, ac Societati Illustrissi na & orlow Bros-Ain, apprecer, quò ea qua felicibus adeò auspiciis capta sunt, porrò prosequi, ac tandem, magno Reip. literaria emolumento, ad exitum perducere Vobis icceat. Literas verò tuas quod attinet, gratias habeo maximas pro iis qua me solità humanitate scire volussi. Caterum à Cl. Hugenio nibil adhuc accepi, alis, at existimo, studiis occupato. Quoniam autem Tu, V C. videri vis meas esse algund putare nugas, accipe, qua circa Alhazeni Problema, curis

secundis meditatus sum.

Datus sit Circulus, cujus centrum A; puncta data sunt D & d. Supponatur factum qued quaritur; sitque Radius incidens DE, re-V. Tab. 11. flexus Ed; & expuncto reflexionis E cadat in junctam DA Fig. VII. normalis EI, & in eandem, ex d, normalis d N, occurrant que eidem Tangens E C & Radius d E, productus in B. Sit nunc D A = z. A = a. NA = n. E = e. dN = b. BA = y. AE = q. CA = x. Igitur, cum anguli, DEC, CEB, sint aquales, & angulus CEA rectus, ex hypothesi, erunt tres, DA, CA, BA, harmonice proportionales, (hoc enim facilé oftenditur.) Erit itaque ut DA ad BA, ita DC ad CB; sive interminis Analyticis, z | y | z - x | x - y ; & 2 z y - x y = $Z \times five \frac{2Z}{2T} = X$. Cum autem Rectangulum C A I, five $\times 2$ fit aquale Quadrato AE sive qq, erit $x = \frac{qq}{4}$, & per consequents $\frac{22}{21} = \frac{qq}{4}$ sive ²⁹⁹/₂₂₁₋₉₉ = y. Porro, est ut d N ad E I, ita N B ad I B; sive b | e | y - n |y-a| Itaque y e - n e = b y - b a ; ϕ y = $\frac{b_2-n_2}{b_2-1}$. Igitur $\frac{299}{222-99} = \frac{b_2-n_2}{b_2-1}$ five 2zbaa-2znae-qqbatqqne=bzqq zqqe. aquatio est ad Hyperbolam circa asymptotos, cujus constructio cum Circulo dato, Problemati satufacit. Cum verò, ob Circulum, sit q q = a a + e e, si loco 2 b z a a ponatur ejus valor 2 b z q q - 2 b z e e, habebitur alia pariter ad Hyperbolam circa asymptotos, bzqq-2bzee 2znae qqba t q q n e = - z q q e. Et hac methodo, atque illà, quam in libello nostro de Analysi exposuimus, prodibant infinita Aquationes ad Hyperlolas & El. lipses, que cum Circulo dato Problema absolvent; nisi quod Esfectiones plan rumque intricatiores evadant quam ut opera pretium sit illas aggredi: Construi tamen poterunt eo mode, que usi sumus in Ellipsi, ejusdem libelli nostri p. 62.

Retulimus, ut vides, calculi nostri summam ad lineam DA; sed satis animadvertis, non majori difficultate referri potuisse ad d A Vid.eandem (qua pariter data est.) ductis scil. lineis, quas in Schemate Fig. VII. punctis adumbravimus. Verum novo calculi labore non est opus. Si enim recta d A, ejusque partibus, eosdem ac prius terminos ana. lyticos adhibeas, b. e siipsam d A facias aqualem z, Dn = b. n A = n. A I = a. i E = e, &c; prodibit eadem Aquatio que prius; & infinitas ulias Hyperbolas & Ellipses obtinebis, que cum Circulo dato Problematisa. tufacient. Doglixos essem, si singulos casus prosegui vellem, cum illorum Aquationes sola signorum + & - variatione discernantur. Unum tamen excipio, nim. cum angulus d A D est rectus; ejus enim aquatio habetur. expunctis à priori aquatione partibus, in quibus n (que in nihilum abit) invenitur: nempe hac, 2 zbaa - qqba = bzqq-zqqe, vel (pro 2 z b a a posito ejus valore) z b q q - q q b a = 2 z b e e - z q q e.

Sed animadvertendum est, quód, licèt referendo Analysin ad restam DA, statim sese offerant in aquatione dua Hyperbola; & alia totidem a prioribus diversa, cum refertur ad restam dA; casdem tamen omninò Parabolas haberi, ad utramvis restarum dA vel DA referatur Analysis: cujus rei ratio levi consideratione Tibi occurret.

Patere nunc, V. Cl. ut superiorem Analysin omnibus, qua circa Speculorum Sphericorum reflexionem proponi solent, Problematibus V. Tab. II. applicem, novo facto Schemate. Sit igitur, ut priùs, Circulus, cnjus centrum A, punctum D datum, & ab eo radius incidens DE, cujus reflexus sit EQ. Junctà DA, ducatur ad illam Tangens EC, & normalis EI; & producatur ad eandem, recta QEB; denominentur partes ut priùs DA=z CA=x. AE=q. BA=y. AI=a. IE=e. Igitur, propter tres DA, CA, BA, Harmonice proportionales, & tres CA, AE, AI, Geometrice, semper habebitur quatio y=\frac{25q}{222-cq}, in quod cunque Circuli punctum cadat DE. Itaque, si quæratur punctum E, in quod si radius DE incidat, reflexatur megan-nenos diametro LAV normali ad DA; reflexus QE, productus transbit per I, ut patet; & I ac B coincident. Igitur a=y=\frac{247}{222-cqq}; sive, a a-\frac{1}{2}\frac{qq2}{3}=\frac{1}{2}qq, & Problema per plana solvetur.

Si quaratur punctum, à quo radius reflectatur parallelus alteri cuilibet lineæ, ut AK (ducta ex centro A;) ducatur ad illam, ex puncto I, Tangens KL=d. Evidens est, Triangula AKL, EIB, fore similia, cum omnia latera unius parallela sint lateribus alterius des Itaque AL ad LK ut EI ad IB, sive q|d|e|a-y; & quad = y = 2qq = 221qq; & zq³=2qzaa=2zdae-q³a+qqde; sive, pro a a posito qq-ee, zq³=2zq²-2zqee-2zdae-q³a+qqde. Utraque autem aquatio est ad Hyperbolam circa asymptotos, qua cum Circulo dato Problema absolvit.

Proponatur nunc efficere, ut radius reflexus transeat per datum punttum N (ut in Problemate Alhazeni,) vel ut productus versus punctum reflexionis Eoccurrat dato puncto N. Ex N cadat in A L normalis NO=n, sitque AO=b. Patet esse, ut AO ad differentiam ipsarum ON, AB, ita EI ad IB, h. e. b | n-y | e | a-y; vel b | y-n | e | a-y. Igitur $\frac{b_2-c}{b-c}=y=\frac{zqq}{zq\cdot -qq}$. Unde 2 z b a a-2 z n a e-q q b a +qqne=b z qq-z q qe; nim. illa ipsa equatio Problematis Albazeniani quam supra innuimus: Vel, secundo casu, $\frac{b_2+c}{b+c}=y=\frac{zqq}{z^2z-qq}$, sive 2 z b a a+z z n a e-q q b a-q q n e=z b q q+z q qe. De quibus equationibus plura non addo, cum vel nimia sint fortasse qua supra diximus.

Atque hac sunt Problemata, qua circa Punctum reflexionis proponi solent

in quibus tamen finitam puncti D dati distantiam suppo.

suimus. Sed facilior erit Analysis, si supponamus Infi- V.eand. Fig. VIII.

nitam. Sect à enim CA bifariam in G, constat ex

proprietate trium, DA, CA, BA, Harmonice proportionalium, tres DG, CG. BG, fore Geometrice proportionales, supposit à quacunque puncti D distantia. Itaque, si supponatur Infinita, BG abibit in nihilum, & punctum B cum puncto G coincidet. Igitur A B erit perpetuò aqualis BC; erit itaque CA=2 y, & Restangulum CAI, aquale Quadrato A E, dabit, in terminis Analyticus, 2 a y=qq, sive y= 99: Cumque distantia puncti D supponatur infinita, erit E D parallela A.C. Itaque, si quaratur radius restexus parallelus A.L., quoniam eo casu a & y coincidunt, erit a = y=qq, sive a a = 1 qq: Si quaratur ut parallelus sit AK, erit rursus q | d | e | a - y; & q - de y = qq, sive 2 q a a - 2 d a e = q3. Si petatur ut transeat per N, erit, ut suprá, bitne y=qq, & 2 baat2 nae = bqq tqqe: que aquationes sunt quoque ad Hyperbolas circa Asymptotos, nisi N punctum esse supponatur in AL; nam, cum tunc n abeat in nihilum, subiatis ab aquatione partibus, in quibus n continetur, residua dant aquationem ad Parabolam, ut suprà quoque monuimus

Non exspectas, V Cl. ut cum specula Concava hastenus in exemplum adduxerim, nunc agam de Convexis. Sous enim, eandem esse prorsus Analysin, & Equationes solà signorum + & variatione distingui. Sous, Parabolam vel Ellipsin, qua uni satisfacit, satisfacere alteri; &, si Hyperbola in Convexo problema absolvat, ejus oppositam paria facere in Concavo. Husitaque omissis, addo tantum, eadem Analysi haberi in Speculus Concavis focos & spatia, qua radii occupant in axe, datà qualibet puncti

lucentis distantià: Sed miràfacilitate, cum radii suppo-

nuntur paralleli; quod tamen nonnullo circuitu à quibus. V.72b.II.Fig.IX.

dam demonstrari vidi. Nam in Speculo Concavo EE,

cujus centrum A, si radius extremus reflecti intelligatur ad axem AR in B, ductà tangente EC, erit CB=BA. Bisecetur semi-axis S55555 2 AR AR in Q; erit itaque Q focus. & QB spatium quesitum. Est autem QB dimidia CR (ob equales AQ, QR, AB, BC,) h. e. dimidia excessus secantis arcus ER supra sinum totum. Igitur si arcus ER sit (e.g.) grad. 9, erit AC 101246, & BQ 623 1000000 ipsius AR.

Sed nimium Te moror in tricis hisce Geometricis, quibus me defuntium existimabam, nist quòd occurrant sape vel aliud agenti. Itaque si Deus vitam & otium dederit, hoc vere fortassis in publicum emittam mea, de Problematum determinatione, mes woraxoñ xôya, de Tangentibus Curvarum, ueres nual ; prasertim cum Cl. Riccius me moneat, à se, studius alius occupato, nihil expectandum este; & nuper à resentant inciderim in methodum facillimam ea demonstrandi, qua longiore circuitu olim inveneram; utragne tamen vià in brevissimam ac facillimam Regulam desinente. Sed quad futurum sit, Ocavi ev yévan usitat: Ego

Quid hic deTangentibus Curvarum pollicetur Vir Illustrissimus, præstita ab eo vide in Transact. N°-95. enim Pyrrhoniano more hactenus i sev opico.
Vale, Vir Cl. meque ex assetuum, ut Soles, amare perge. Dab. Leodii VI. Kafend.
Januar. st. n. CIOIOCLXXII.

Hæc Dn. Slusius; quæ quomodo placuerint Dn. Hugenio, quidque hic iis rescripserit, alia occasione, cum una vice omnia huc spectantia tradi commodé nequeant, Deo dante, exhibebimus.





